

Lineáris függvények

A függvények megadásánál többféle megszokott jelölés is létezik.

Az $f: x \mapsto 3x$ jelölés helyett használhatjuk az $f(x)=3x$ jelölést is. Ez a jelölés azért lehet hasznos, mert a helyettesítési érték itt jobban látható.

Például az f függvény 5 helyen felvett helyettesítési értéke: $f(5)=3 \cdot 5=15$.

1. feladat

Számítsuk ki néhány helyen a függvények **helyettesítési értékeit**, majd rendezzük a kapott értékeket közös táblázatba! Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az f , g , h függvényeket!

$$f(x)=2 \cdot x \quad g(x)=2 \cdot x+3 \quad h(x)=2 \cdot x-4$$

Például, ha $x=-2$, akkor:

$$f(-2)=2 \cdot (-2)=-4$$

$$g(-2)=2 \cdot (-2)+3=-1$$

$$h(-2)=2 \cdot (-2)-4=-8$$

Az értéktáblázat és a függvények grafikonja néhány elem esetén:

x (ebben a sorban az x értékeket tetszőlegesen megadhatod)	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2 \cdot x$ (ezeket az értékeket pedig a megadott szabály alapján számolod)	-4	-2	0	2	4	6
$g(x)=2 \cdot x+3$	-1	1	3	5	7	9
$h(x)=2 \cdot x-4$	-8	-6	-4	-2	0	2

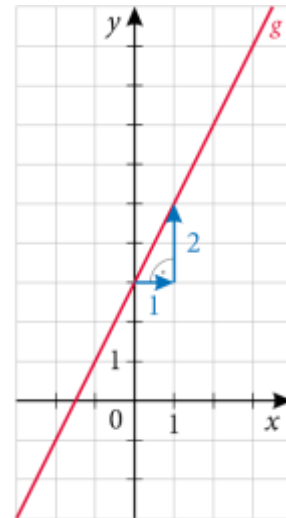
Ábrázolva:

Látjuk, hogy az $f(x)=2 \cdot x$; $g(x)=2 \cdot x+3$; $h(x)=2 \cdot x-4$ függvények grafikonjai egymással párhuzamos egyenesek. A párhuzamosságot az alábbiakkal indokolhatjuk:

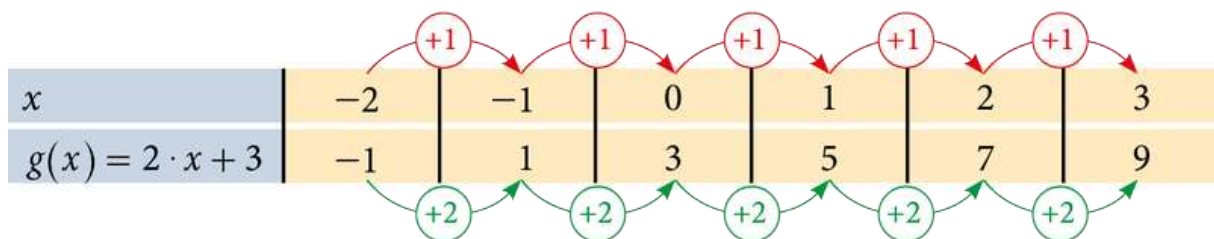
- Az f függvény egyenes arányosság, ezért grafikonja egyenes.
- A g függvény grafikonját megkapjuk, ha az f függvény minden értékéhez hozzáadunk 3-at. Ez azt jelenti, hogy az f függvényt az y tengely mentén 3 egységgel toljuk el pozitív irányba.
- A h függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg az f függvény grafikonjából, hogy az y tengely mentén 4 egységgel toljuk el negatív irányba.
- Az f , g , és h függvények párhuzamossága már a függvények megadásából is következtethetünk, mivel a képletekben az x változó szorzója mindenhol 2.

Mit jelent ez a 2-es szorzó?

Ha az értéktáblázatot megnézzük, azt látjuk, hogyha az x értéke eggyel nő, akkor a hozzárendelt függvény értéke 2-vel nő.



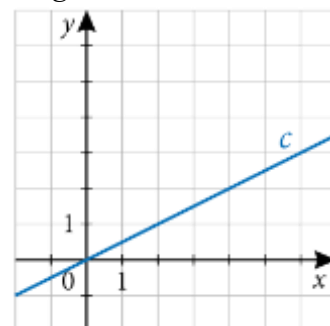
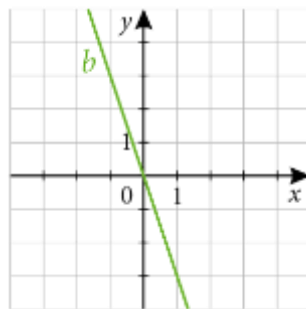
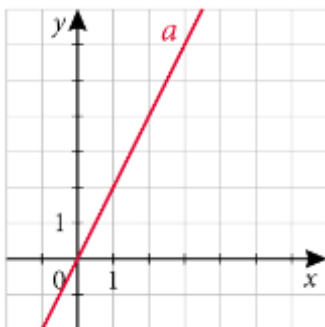
Nézzük meg ezt például a g függvény esetén.



Az x változó szorzója a függvény **meredekségét** határozza meg. Mivel ez a szó m betűvel kezdődik, a meredekséget gyakran m betűvel jelöljük. Minél nagyobb a függvény meredeksége – azaz az m értéke – annál gyorsabb a függvény változása.

Kidolgozott feladatok:

Ábrázoljuk az $a: x \mapsto 2x$, $b: x \mapsto -3x$, $c: x \mapsto 12x$ függvényeket, és határozzuk meg a meredekségüket!



Mindegyik függvény egyenes arányosság, mindegyik függvény grafikonja áthalad az origón. Az a függvény meredeksége 2, a b függvényé -3 , a c függvényé 12.

Az egyenes arányosság függvényét általános képlettel így is írhatjuk: $x \mapsto m \cdot x$, ahol $m \neq 0$ egy szám, amely a függvény meredekségét jelenti.

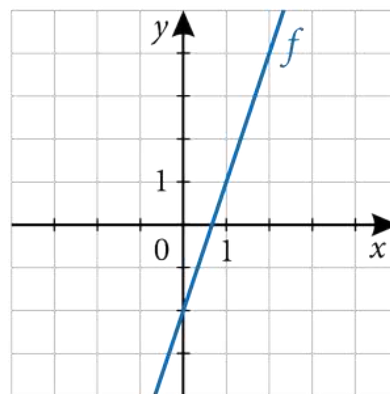
Számítsuk ki a megadott függvények értékét két-két helyen, és ábrázoljuk a függvényeket a ki-számított értékek segítségével!

$$f: x \mapsto 3x - 2 \quad g: x \mapsto 23x + 1 \quad h: x \mapsto -12x + 4$$

Határozzuk meg a függvények meredekségét!

Az f függvényhez készített táblázat:

x	0	1
$3x - 2$	-2	1

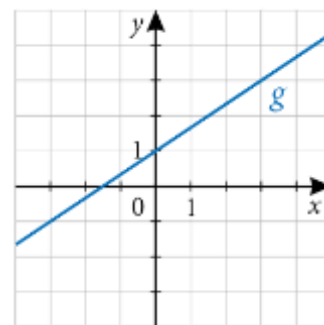


Ha az x értéke 1-gyel nő, akkor a függvény értéke 3-mal nő. Tehát az f függvény meredeksége 3.

A g függvény ábrázolásához az $x=0$ érték mellett célszerű az $x=3$ értéket választani, mert így egész koordinátájú pontokat kapunk.

x	0	3
$23x + 1$	1	3

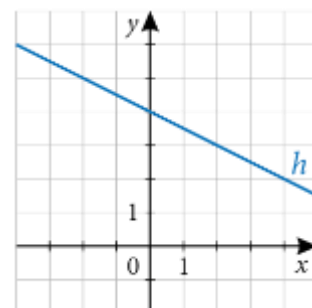
Láthatjuk, hogy ha az x értéke 3-mal nő, akkor a hozzá tartozó érték 2-vel növekszik. Ezért, ha az x értéke 1-gyel nő, akkor a hozzá tartozó függvényérték 23-dal nő. Tehát a g függvény meredeksége $m=23$.



A h függvény két helyettesítési értéke legyen 0 és 2.

x	0	2
$-12x + 4$	4	3

A h függvény esetén, ha az x értéke 2-vel nő, akkor a hozzá tartozó függvényérték 1-gyel csökken. Másként mondva: ha az x értéke 1-gyel nő, akkor a függvényérték 12-del csökken. Tehát a h függvény meredeksége $m=-12$.



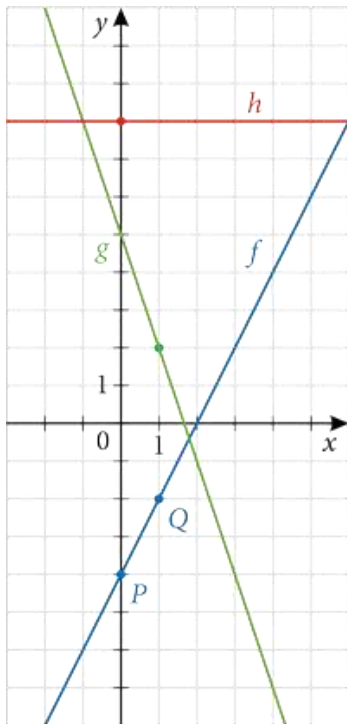
Az ilyen típusú függvényeket könnyű ábrázolni, mivel grafikonjuk minden esetben egyenes lesz (vagy annak részhalmaza), és az egyenest meghatározza két pontja. Ezért az ilyen típusú függvényeket lineáris függvényeknek nevezzük.

A lineáris függvényeket általános képlettel így is írhatjuk: $f: x \mapsto m \cdot x + b$, ahol az m szám a függvény meredekségét jelenti. A meredekség azt mutatja meg, hogy mennyivel változik a függvény értéke, ha az x tengelyen egy egységet haladunk pozitív irányba. A b értéke azt adja meg, hogy a függvény grafikonja hol metszi az y tengelyt.

Lineáris függvények vizsgálata

Megadtunk három lineáris függvényt a koordináta-rendszerben.

Határozzuk meg a függvények hozzárendelési szabályát!



A függvény hozzárendelési szabályát akkor kényelmes felírni, ha ismerjük a függvény meredekségét (m érték) és az y tengellyel való metszéspont második koordinátáját, azaz a függvény tengelymetszetét (b érték).

A P pont koordinátái az f függvény esetében $P(0; -4)$, ezért a $b = -4$.

A meredekséget például úgy olvashatjuk le, hogy meghatározzuk még egy pont koordinátáit. A grafikonon ez a $Q(1; -2)$ pont lesz. Ebből kiszámítható a meredekség: egy egységet lépünk az x tengely mentén pozitív irányba, majd kettőt felfelé, tehát a meredekség $m = 2$.

Az f függvény hozzárendelési szabálya: $f: x \mapsto 2x - 4$.

A g függvény esetén hasonlóan eljárva kapjuk, hogy $b = 5$ és $m = -3$, tehát a g függvény hozzárendelési szabálya $g: x \mapsto -3x + 5$.

A h függvény esetében még könnyebb dolgunk van, hiszen ez egy állandó (konstans) függvény. Most $m = 0$ és $b = 8$, tehát $h: x \mapsto 8$.

Milyen különbséget látunk az f és g grafikonja között?

Az f függvény „**emelkedő**”, a g függvény „**süllyedő**”.

Fogalmazzuk meg ezt pontosabban!

Az f függvény esetében azt láthatjuk, hogy nagyobb x értékhez nagyobb függvényérték tartozik.

x érték	f függvényértéke
0	-4
1	-2
2	0
3	2

x érték	g függvényértéke
0	5
1	2
2	-1
3	-4

A g függvény esetében azt láthatjuk, hogy nagyobb x értékhez kisebb függvényérték tartozik.

Az „emelkedő” függvényeket a matematikában növekedőnek nevezzük, a „süllyedő” függvényeket pedig csökkenőnek.

A hozzárendelési szabályból megállapítható, hogy a lineáris függvény növekedő vagy csökkenő.

Ha a meredekség pozitív, akkor a függvény növekedő, ha a meredekség negatív, akkor csökkenő.

Ha a meredekség 0, akkor a függvény minden számhoz ugyanazt a számot rendeli, azaz a függvény állandó, más szóval konstans.

Nem lineáris függvények

Abszolútérték függvény

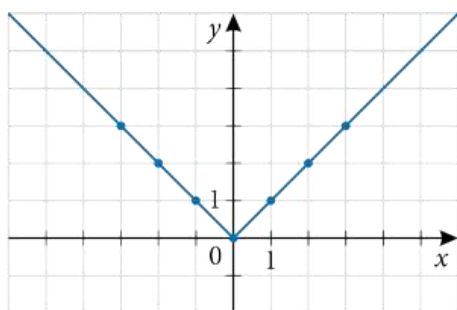
Ábrázoljuk a következő hozzárendeléssel megadott függvényt!

$$f: x \mapsto |x|$$

Szöveggel megfogalmazva: *Minden számhoz hozzárendeljük az abszolút értékét.*

Készítsünk értéktáblázatot a függvény ábrázolásához!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$ x $	3	2	1	0	1	2	3



A kapott számpárokat ábrázolva a függvény grafikonja:

A grafikonnak csak néhány pontját ismerjük. Ha sok pontot ábrázolunk, akkor láthatjuk, hogy az abszolútérték-függvény grafikonja két félegyenesből tevődik össze.

Ennek az az oka, hogy:

{a 0-hoz és a pozitív számokhoz önmagát rendeljük, azaz $x \mapsto x$, ha az x nemnegatív szám; negatív számokhoz a számok ellentettjét rendeljük, azaz $x \mapsto -x$, ha az x negatív szám.

A függvényt abszolútérték-függvénynek nevezzük, és grafikonja jellegzetes V alakú.

Ezt a függvényt minden valós szám esetén értelmezzük.

A függvény csökkenő, ha $x < 0$, növekedő, ha $x > 0$.

Ábrázold az $f: x \mapsto |x|$ függvényt a füzetedben, és válaszolj az alábbi kérdésekre!

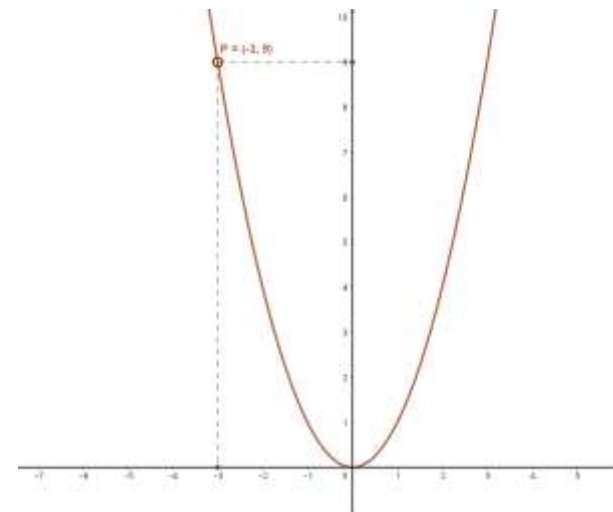
1. Mekkora a függvény értéke, ha $x=1$; $x=3$; $x=12$; $x=-2$; $x=-2,5$?
2. Melyik x érték esetén veszi fel a függvény az $f(x)=0$; $f(x)=3$; $f(x)=4,5$; $f(x)=-2$; $f(x)=7$ értékeket?
3. Melyik x értékek esetén lesz a függvény értéke nagyobb, mint 5?
4. Melyik x értékek esetén lesz a függvény értéke kisebb, mint 4?

Másodfokú függvény

A másodfokú függvény grafikonja egy olyan parabola, amelynek a szimmetriatengelye párhuzamos az y tengellyel. Ennek a parabolának általános egyenlete tehát: $y=ax^2+bx+c$.

A legegyszerűbb másodfokú függvény paraméterei: $a=1$, $b=0$, $c=0$.
Ekkor a függvény képlete: $f(x)=x^2$.

Ennek grafikonja:



Az $f(x)=x^2$ függvény jellemzése:

<u>Értelmezési tartomány:</u>	$x \in \mathbb{R}$. (Minden valós számra értelmezzük)
<u>Értékkészlet:</u>	$y \geq 0$ (A függvény értéke nagyobb vagy egyenlő, mint nulla –hiszen minden szám négyzete pozitív vagy 0 pl (-5) a másodikon és a (+5) a másodikon is +25)
<u>Zérushelye:</u>	Az $x=0$ helyen veszi fel a 0 értéket ($y=0$), ezért a zérus hely $x=0$
<u>Menete, monotonitása:</u>	Szigorúan monoton csökken, ha $x < 0$ (balról jobbra haladva csökken a függvény értéke a negatív oldalon) és szigorúan monoton nő, ha $x > 0$ (a 0-tól a +végtelen felé haladva nő a függvény értéke)
<u>Szüksőértéke:</u>	Minimum, $x=0$, $y=0$. (szüksőérték ahol a legkisebb vagy legnagyobb értékét veszi fel)
<u>Páros vagy páratlan:</u>	Páros. (A páros függvények képe szimmetrikus a koordinátasík y tengelyére.)
<u>Konvex/konkáv:</u>	Konvex. (alulról domború)
<u>Folytonos:</u>	Igen.